

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
20 Ιανουαρίου 2018

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{2\beta + \alpha}{\beta} \right) \cdot \frac{500}{3} - 18 \cdot \left(\frac{\alpha - 11\beta}{\beta} \right),$$

αν δίνεται ότι: $\frac{\alpha}{\beta} = 10$.

Πρόβλημα 2.

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων που πρέπει να αφαιρεθούν από το σύνολο $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, έτσι ώστε το γινόμενο όλων των στοιχείων του που θα απομείνουν να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου;

Πρόβλημα 3

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 115^\circ$ θεωρούμε στο εσωτερικό του σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Delta\hat{B}\Gamma = 2 \cdot \Delta\hat{B}A$ και $\Delta\hat{\Gamma}B = 2 \cdot \Delta\hat{\Gamma}A$. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\Delta\Gamma$.

Πρόβλημα 4

Ο Γιάννης πήγε στην αγορά έχοντας μαζί του κέρματα των δύο ευρώ και του ενός ευρώ. Ο αριθμός των κερμάτων του ήταν 40. Για την αγορά που έκανε ξόδεψε ακριβώς το ένα τρίτο των κερμάτων των δύο ευρώ που είχε μαζί του. Την επόμενη μέρα ξόδεψε το 40% της αξίας των χρημάτων που του είχαν απομείνει. Αν και τις δύο μέρες ξόδεψε συνολικά 40 ευρώ, να βρείτε πόσα κέρματα των δύο ευρώ είχε αρχικά μαζί του.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
20 Ιανουαρίου 2018

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)^2,$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\beta = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\gamma = -\frac{18}{2^3}$, $\delta = \frac{1}{2^3}$.

Πρόβλημα 2

Μία ομάδα εργατών τελειώνει το $\frac{1}{4}$ ενός έργου στο $\frac{1}{3}$ μιας ημέρας. Πόσες τέτοιες ομάδες εργατών της ίδιας απόδοσης χρειάζονται για να τελειώσουν 15 ίδια έργα σε 5 ημέρες;

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε πολυώνυμο $P(x) = a(x+2)^2 + b(x+3) + c$ όπου οι αριθμοί a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $x > y$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\frac{P(x) - P(y)}{x - y}$$
 είναι θετικός ακέραιος.

(β) Αν ο αριθμός $P(8)$ είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $P(2018)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και $\hat{A} = 72^\circ$. Ονομάζουμε Δ το ίχνος του ύψους από την κορυφή Γ και Ε το συμμετρικό του Α ως προς την ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΕ περνά από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Σημείωση: Ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου είναι ο κύκλος που περνάει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
20 Ιανουαρίου 2018

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί $a_1 = x + y$, $a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $a_3 = x^3 + y^3$ είναι ακέραιος.

Πρόβλημα 2

Έστω $A = κ(κ+1)(κ+2)(κ+3)$ το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών θετικών ακέραιων.

(α) Να αποδείξετε ότι ο A ισούται με το γινόμενο δύο διαδοχικών άρτιων ακέραιων.

(β) Είναι δυνατόν να είναι ο A ίσος με το τετράγωνο ενός ακέραιου;

Πρόβλημα 3

Σε ισοσκελές τραπέζιο $ABΓΔ$ το άθροισμα των δύο μη παράλληλων πλευρών του ίσο με $4\sqrt{10}$ μέτρα, το ύψος του είναι ίσο με 6 μέτρα και το εμβαδόν του ισούται με 72 τετραγωνικά μέτρα. Αν το τραπέζιο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R , να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας R .

Πρόβλημα 4

Πόσοι εξαψήφιοι θετικοί ακέραιοι πολλαπλασιαζόμενοι με το 2007 δίνουν αποτέλεσμα που να λήγει σε 2008;

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
20 Ιανουαρίου 2018

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες αληθεύει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η ανίσωση:

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 3} > \frac{x + a}{x^2 + x + 1}.$$

Πρόβλημα 2

Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί $a_1 = x + y$, $a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $a_5 = x^5 + y^5$ είναι ακέραιος.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β έτσι ώστε $\beta = 2\alpha$. Στο εσωτερικό του θεωρούμε N κύκλους (που πιθανόν τέμνονται), έτσι ώστε το άθροισμα των μηκών των περιφερειών τους να είναι διπλάσιο της περιμέτρου του ορθογωνίου. Να αποδείξετε ότι $N \geq 4$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) για το οποίο ισχύει $\Gamma\Delta = 2AB$. Αν E είναι το συμμετρικό του σημείου A ως προς το B και K είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $B\Gamma E$ να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Gamma E$ εφάπτεται στην $\Gamma\Delta$ στο σημείο Γ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Gamma K$ εφάπτεται στην ΓE στο σημείο Γ .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
20 Ιανουαρίου 2018

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$(a-1)(x^2+2x+2)^2=(a+1)(x^4+4),$$

για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a .

Πρόβλημα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2}) + \sin(x\sqrt{3})$, $x \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος ώστε

$$f(x+T) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$) και έστω O το σημείο τομής των διαγώνιων του $A\Gamma$ και $B\Delta$. Έστω ακόμη K το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου C_1 του τριγώνου OAB και M το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου C_2 του τριγώνου $O\Delta\Gamma$. Αν E είναι το σημείο τομής των ευθειών KA και $M\Delta$ και Z είναι το σημείο τομής των KB και $M\Gamma$, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, O, M καθώς και το μέσο της EZ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Πρόβλημα 4

Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί p, q, r με $p > q > r$ είναι πρώτοι, να εξετάσετε, αν οι αριθμοί $\sqrt[3]{2018pq}, \sqrt[3]{2018qr}, \sqrt[3]{rp}$ μπορούν να ανήκουν στην ίδια αριθμητική πρόοδο.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία!