



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
**76<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 16 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2016**

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ  
ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν **ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, το ΣΤΑΘΕΡΟ και ΚΙΝΗΤΟ ΤΗΛΕΦΩΝΟ**, τα οποία θα ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει η διανομή φωτοτυπιών των θεμάτων στους μαθητές.
3. Να φωτοτυπηθεί και να μοιραστεί σε όλους τους μαθητές η επιστολή που σας αποστέλλουμε μαζί με τα θέματα.
4. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η διανομή φωτοτυπιών (9-12 περίπου). Δε θα επιτρέπεται σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει μία ώρα από την έναρξη της εξέτασης.
5. Οι επιτηρητές των αιθουσών έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή, αν έχει λόγους να υποπτευεται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
6. Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου, καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.
7. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην **Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα**, αφού πρώτα στα παραρτήματα, εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών. Θερμή παράκληση, όπως τα αδιόρθωτα γραπτά αποσταλούν στην ΕΜΕ άμεσα και τα διορθωμένα το αργότερο μέχρι 5 Φεβρουαρίου.
8. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε.
9. Η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών «**ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ**» θα γίνει στις **27 Φεβρουαρίου 2016** στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτούς και επί πλέον από ένα τελικό προκριματικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. που θα γίνει στις **26 Μαρτίου 2016** θα επιλεγεί η εθνική ομάδα, που θα συμμετάσχει στην **Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Αλβανία, Μάιος 2016)**, στην **20<sup>η</sup> Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Ιούνιος 2016)** και στην **57<sup>η</sup> Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Χονγκ Κονγκ, Ιούλιος 2016)**.
10. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν με την εθελοντική τους συμμετοχή στην επιτυχία των Πανελληνίων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.
11. Παρακαλούμε τον Πρόεδρο της ΤΝΕ να αναπαράγει με τα ονόματα των επιτηρητών την ευχαριστήρια επιστολή του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και την παραδώσει στους επιτηρητές.

Για το Διοικητικό Συμβούλιο  
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ο Πρόεδρος  
Νικόλαος Αλεξανδρής  
Ομότιμος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Ο Γενικός Γραμματέας  
Ιωάννης Τυρλής  
Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
76<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
16 Ιανουαρίου 2016

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1.**

Δίνονται οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί  $\alpha = 0, \bar{2}$  και  $\beta = 0, \bar{3}$ .

(α) Να γράψετε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  σε κλασματική μορφή.

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016}$$

**Πρόβλημα 2.**

Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο με τον οποίο είτε πολλαπλασιάσουμε είτε διαιρέσουμε το 2016, προκύπτει ως αποτέλεσμα τέλειο τετράγωνο.

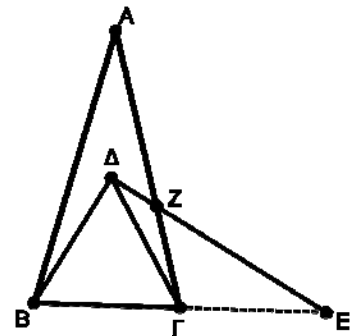
**Πρόβλημα 3**

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές ( $AB = A\Gamma$ ) και  $\hat{A} = 30^\circ$ . Το τρίγωνο  $B\Gamma\Delta$  είναι ισόπλευρο και το σημείο  $E$  βρίσκεται στη προέκταση της πλευράς  $B\Gamma$  και είναι τέτοιο ώστε  $B\Gamma = \Gamma E$ . Αν η πλευρά  $A\Gamma$  τέμνεται από τη  $\Delta E$  στο σημείο  $Z$ , τότε:

(α) Να υπολογιστούν οι γωνίες  $\hat{A}B\Delta$  και  $\hat{A}\Gamma\Delta$ .

(β) Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $A\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελή.

(γ) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο  $B\Delta E$  είναι ορθογώνιο.



**Πρόβλημα 4**

Για την εκτέλεση ενός μεγάλου ερευνητικού έργου στο προαπαιτούμενο χρονικό όριο, ξεκίνησαν να εργάζονται συνολικά 500 ερευνητές. Όταν τελείωσε στην ώρα του το  $\frac{1}{4}$  του

έργου, αποχώρησαν 100 ερευνητές, οπότε το δεύτερο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με καθυστέρηση. Αποχώρησαν όμως τότε και άλλοι 100 ερευνητές, οπότε το τρίτο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με επιπλέον καθυστέρηση. Πόσοι ερευνητές πρέπει να προσληφθούν, ώστε το έργο να τελειώσει στον προγραμματισμένο χρόνο.

(Υποθέτουμε ότι όλοι οι ερευνητές που εργάστηκαν, αλλά και αυτοί που θα προσληφθούν, δουλεύουν με την ίδια απόδοση)

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
76<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
16 Ιανουαρίου 2016

Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1.** Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο:  $P(x) = 4(x+4)^2 - 28(x+4) + 48$   
και να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 6\sqrt{P(-5)} - 4\sqrt{P(4)} .$$

**Πρόβλημα 2**

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $x(2x-1)(2x+1)+x=4x^3$ , για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .

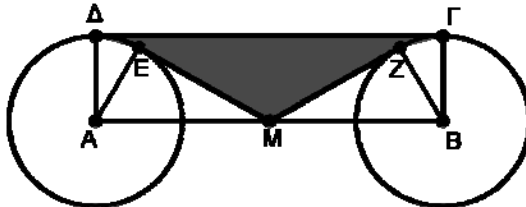
(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $A = 4031 \cdot 4033 \cdot 32256 + 32256$  ισούται με τον κύβο ενός ακεραίου αριθμού τον οποίο και να προσδιορίσετε.

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές  $AD = a$  και  $AB = 4a$ . Με κέντρα τα σημεία Α, Β και ακτίνα  $a$  γράφουμε κύκλους. Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, η ΜΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Α και η ΜΖ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{\Delta A E}$ .

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου ΔΕΜΖΓ που περικλείεται από το τόξο ΔΕ, τα τμήματα ΕΜ, ΜΖ, το τόξο ΖΓ και το τμήμα ΓΔ.



**Πρόβλημα 4**

Δύο φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα  $\frac{3}{4}$  και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις δίνει στο Βαγγέλη. Στη συνέχεια ο Βαγγέλης παίρνει τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το  $\frac{1}{12}$  και δίνει στο Γιάννη τις υπόλοιπες.

Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι εξαπλάσιες από τις καραμέλες του Βαγγέλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
76<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
16 Ιανουαρίου 2016  
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \left( \frac{25}{x+8} - \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt[3]{x^2} - 2 \cdot \sqrt[3]{x} + 4} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^4} + 8 \cdot \sqrt[3]{x}}{9 - \sqrt[3]{x^2}} + \frac{21 - \sqrt[3]{x^2}}{3 + \sqrt[3]{x}}, \text{ όπου } x > 0 \text{ και } x \neq 27.$$

**Πρόβλημα 2**

Να εξετάσετε, αν η εξίσωση  $64x^2 + 16^{10}x - 2016^{2016} = 0$  έχει ρητή ρίζα.

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 40^\circ$ . Έστω  $\Delta$  το μέσο της πλευράς  $A\Gamma$ . Θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα  $AE\Delta$  και  $\Delta\Gamma Z$  των οποίων οι κορυφές  $E, Z$  βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή την  $A\Gamma$  και στο οποίο ανήκει η κορυφή  $B$ . Αν η  $E\Delta$  τέμνει την  $AB$  στο  $K$ , να αποδείξετε ότι η  $KZ$  είναι κάθετη στη  $B\Gamma$ .

**Πρόβλημα 4**

Τρεις φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης και ο Βασίλης, έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα στη σακούλα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα  $\frac{3}{4}$  και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Ο Βαγγέλης παίρνει κάποιες από τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το  $\frac{1}{4}$  από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Τέλος ο Βασίλης παίρνει τις υπόλοιπες που είχαν μείνει στη σακούλα κρατάει το  $\frac{1}{6}$  από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει θετικό ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι τριπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη και οι καραμέλες του Βαγγέλη είναι διπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

**Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες**  
**Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες**

**Καλή επιτυχία**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
76<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
16 Ιανουαρίου 2016

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος  $\alpha_1 = (2-x)^2$ ,  $\alpha_2 = 2^2 + x^2, \dots$ , όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.

Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του  $n$ , ( $n > 1$ ), για την οποία ο μέσος όρος των  $n$  πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του  $x$ , για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .

**Πρόβλημα 2**

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση

$$10x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0.$$

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  (με  $AB < A\Gamma < B\Gamma$ ) και τα μέσα  $M, N$  των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$ , αντίστοιχα. Ο κύκλος  $(c_1)$  έχει διάμετρο την  $AM$  και τέμνει τις  $A\Gamma, MN$  στα σημεία  $\Delta, E$  αντίστοιχα. Ο κύκλος  $(c_2)$  έχει διάμετρο την  $\Gamma N$  και τέμνει την  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Lambda$ . Η  $E\Lambda$  τέμνει το κύκλο  $(c_1)$  στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $Z\Delta N\Lambda$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**Πρόβλημα 4**

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων  $(a, b)$  που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός

$$\frac{a}{b} + \frac{17b}{36a}$$
 να είναι ακέραιος.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

*Καλή επιτυχία!*



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
76<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
16 Ιανουαρίου 2016

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος  $b_1 = (x-4)^2$ ,  $b_2 = x^2 + 16, \dots$ , όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.

Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του  $n$ , ( $n > 1$ ), για την οποία ο μέσος όρος των  $n$  πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του  $x$ , για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .

**Πρόβλημα 2**

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση:

$$10x^4 - 8x^3 - 24x^2 - 32x - 16 = 0.$$

**Πρόβλημα 3**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g : A \rightarrow R$ , όπου  $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  και  $f(x) \cdot g(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in A$ . Αν για κάθε  $x, y \in A$  ισχύουν οι σχέσεις:

$$f\left(\frac{g(x)}{g(y)}\right) = \frac{f(g(x))}{y} \quad (1), \quad g\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right) = \frac{g(f(x))}{y}, \quad (2)$$

να αποδείξετε ότι:

(α) Οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι '1-1' (ένα προς ένα).

(β)  $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = 1$  για κάθε  $x \in A$ .

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται τρίγωνο  $ABC$  (με  $AB < AC < BC$ ) και ο περιγεγραμμένος κύκλος του  $c(O, R)$ .

Ο κύκλος  $c_1(C, AB)$  (με κέντρο το σημείο  $C$  και ακτίνα  $AB$ ) τέμνει τον κύκλο  $(c)$  στα σημεία  $D$  και  $E$  (το  $E$  ανήκει στο τόξο στο οποίο δεν ανήκει το σημείο  $A$ ). Ο κύκλος  $c_2(B, BD)$  (με κέντρο το σημείο  $B$  και ακτίνα  $BD$ ) τέμνει τον κύκλο  $(c_1)$  στο σημείο  $F$ . Να αποδείξετε ότι η  $AF$  περνάει από το μέσο  $M$  της  $BC$ .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!