



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $4x - 5y = 10$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (4x + 5y) - 36x + 35y + (8 : 4 - 2)^2.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει πλευρές $AB = 3x - 2$, $B\Gamma = x + 12$ και $\Gamma A = 2x + 8$, όπου $x \geq 2$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. Υπάρχει τιμή του x για την οποία το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$ μήκους α και β , αντίστοιχα. Αν αυξήσουμε το μήκος α κατά 20% και το μήκος β κατά 30%, να βρεθεί πόσο επί τοις εκατό θα αυξηθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A\Gamma > AB$) με τη γωνία \hat{A} διπλάσια της γωνίας \hat{B} και τη γωνία \hat{B} μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κατά είκοσι μοίρες. Δίνονται ακόμα το ύψος του AH και η διχοτόμος του $A\Delta$.

(α) Αν A', B', Γ' είναι τα συμμετρικά των κορυφών A, B, Γ του τριγώνου $AB\Gamma$, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία του ύψους AH , να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABB' και $A\Gamma\Gamma'$ είναι ισοσκελή και να βρείτε τις γωνίες τους.

(β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζεται από το ύψος AH και τη διχοτόμο $A\Delta$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $a + 2b = \frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (16a + 32b)^{-2} - (32a + 64b)^{-3} + \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^{-4} : 3^4 \right]^3.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2 + 4y^2 = \frac{20}{3}xy,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{x + 2y}{x - 2y}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους $n = \overline{ab} = 10a + b$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, που έχουν την ιδιότητα:

Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ που είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Οι δύο χορδές τέμνονται στο σημείο K , έτσι ώστε να είναι $AK > KB$. Έστω M το συμμετρικό του B , ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο K . Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου $A\Gamma\Delta$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Α' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση

$$A = \frac{\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right)^m \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)^n \cdot \left(x - \frac{1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}},$$

όπου m, n ακέραιοι και x, y πραγματικοί αριθμοί με $xy \neq 0$, $xy \neq 1$ και $xy \neq -1$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α, β , αν γνωρίζετε ότι ισχύουν:

$$|\alpha - \beta| = |\alpha| + |\beta| \quad \text{και} \quad \alpha^3 \beta^2 + \alpha^2 \beta^3 + 2\alpha^2 \beta^2 - \alpha - \beta = 37.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3α . Πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ λαμβάνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $ΕΓ = ΖΔ = \alpha$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ και ΔΕ τέμνονται στο σημείο Κ. Αν η ευθεία ΑΚ τέμνει την ευθεία ΕΖ στο σημείο Λ, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $ΑΛ \perp ΕΖ$.

Μονάδες 3

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΛ συναρτήσει του α .

Μονάδες 2

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, όπου a, b, c ψηφία με $a \neq 0$, ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα:

$$\overline{abc} = (a + b^2 + c^3)^2.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$x^2 + 4y^2 = 4a^2$$

$$ax - y = 2a,$$

έχει μία μόνο λύση.

Για τις τιμές του a που θα βρείτε, να λύσετε το σύστημα.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Έστω $S_1 = x + y + z$ και $S_2 = xy + yz + zx$, όπου $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = 6.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $3xyz = S_1 S_2 - 6$.

Μονάδες 4

(β) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z , αν είναι $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$.

Μονάδες 1

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Αν $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου και K_1, K_2, K_3 είναι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $AB\Delta$, $A\Gamma\Delta$, $AB\Gamma$, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $AK_3 = K_1 K_2$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4.

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού k , $1 < k < 30$ και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Γ' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου m για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -3x + 6$, $g(x) = mx$, $m \in \mathbb{R}$, και τον άξονα των x ισούται με 3. *Μονάδες 5*

Πρόβλημα 2

Έστω H το ορθόκентρο και O το περίκентρο οξυγωνίου τριγώνου $AB\Gamma$. Έστω ακόμη Δ , E και Z τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma$, $A\Gamma$ και AB , αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία Δ_1 , E_1 και Z_1 έτσι ώστε:

$$\overrightarrow{O\Delta_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{O\Delta}, \quad \overrightarrow{OE_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{OE} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OZ_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{OZ}, \quad \text{με } \lambda > 1.$$

Ο κύκλος C_α που έχει κέντρο το σημείο Δ_1 και διέρχεται από το H τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στα σημεία A_1 και A_2 . Όμοια, οι κύκλοι C_β (E_1, E_1H) και C_γ (Z_1, Z_1H) ορίζουν τα σημεία B_1 , B_2 και Γ_1 , Γ_2 στις ευθείες $A\Gamma$ και AB , αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A_1, A_2, B_1, B_2, \Gamma_1$ και Γ_2 είναι ομοκυκλικά.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε την τιμή του θετικού ακέραιου k και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού n , έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x - k)P(3x) = k(x - 1)P(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών, το σύνολο των πραγματικών αριθμών ($f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$). Αν για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση:

$$f(f(f(x)) - f(y)) = f(x) - f(f(y)),$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ